Limites $\lim_{x \to x_0} f(x) = ?$

Sommaire : on a 5 méthodes :

- méthode 1 : simple
- méthode 2 : polynôme à $\pm\infty$
- méthode 3 : $\frac{0}{0}$ sans $\sqrt{}$
- méthode 4 : $\frac{0}{0}$ avec $\sqrt{}$
- méthode 5 : $\left(\frac{\infty}{\infty}\ ;\ 0\times\infty\ ;\ +\infty-\infty\right)$

Méthode 1 : on remplace x par x_0

ex : $\lim\limits_{x \to (-2)} x^3 - 2x^2 + 12 = (-2)^3 - 2\cdot 2^2 + 12$

$= -8 - 8 + 12 = -4$

Méthode 2 : si $f(x)$ est un polynôme et $x_0 = \pm\infty$

on garde le monôme le plus haut degré

ex : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{-7x^2 + x + 12} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2}{-7x^2} = \frac{5}{-7}$

Rappel 1 : si $\alpha \neq 0$

$\frac{\alpha}{\pm\infty} = 0$ (avec règle des signes)

$\frac{\alpha}{0^{\pm}} = \pm\infty$

Rappel 2 :

$2^+ = 2{,}1$ / $2^- = 1{,}9$

$(-3)^+ = -2{,}9$

ex : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^3 + 1}{-5x^4 - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^3}{-5x^4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{5x} = \frac{2}{-\infty} = 0$

Si on trouve une forme indéterminée F.I $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, +\infty-\infty\right)$ il faut

⚠ $\frac{0}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{0} = \infty$ ne sont pas des F.I

Méthode 3 : si on trouve $\frac{0}{0}$ sans $\sqrt{}$:

on met en facteur $\frac{(x - x_0)(\dots)}{(x - x_0)(\dots)}$, puis on simplifie.

Rq : souvent on aura 3 cas de polynôme :

1er degré : $ax + b = a(x - x_0)$

2ème degré : $ax^2 + bx + c = (x - x_0)(ax + \frac{c}{x_0})$

3ème degré : produit remarquable :

$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ex1 : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{7x^2 - 2x - 5}{-3x^2 + x + 2} = \frac{0}{0}$ F.I

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(7x+5)}{(x-1)(-3x-2)} = \frac{12}{-5}$

ex2 : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{-3x + 6} = \frac{0}{0}$ F.I

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{-3(x-2)} = \frac{12}{-3} = 4$

ex3 : $\lim\limits_{x \to (-3)} \frac{x^2 + x - 6}{2x + 6} = \frac{0}{0}$ F.I

$= \lim\limits_{x \to (-3)} \frac{(x+3)(x-2)}{2(x+3)} = \frac{-5}{2}$

Méthode 4 : si on trouve $\frac{0}{0}$ avec $\sqrt{}$:

on multiplie par l'expression conjuguée $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

puis on revient à la méthode 3

ex1 : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{3x^2 - 2x - 8} = \frac{0}{0}$ F.I

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(3x^2 - 2x - 8)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2) - 4}{(3x^2 - 2x - 8)(\sqrt{x+2} + 2)}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(3x+4)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(3x+4)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{40}$

⚠ il semble pas de revenir à la 3ème méthode

Méthode 5 : si on trouve $\left(\frac{\infty}{\infty}\ ;\ 0\times\infty\ ;\ +\infty-\infty\right)$

elle est souvent sous forme :

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \alpha x$

- si $\sqrt{a} = \pm\alpha$ (expression conjugué)
- si $\sqrt{a} \neq \pm\alpha$ (x en facteur)

⚠ $\sqrt{x^2} = |x|$

- x si $x \to +\infty$
- $-x$ si $x \to -\infty$

exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} - x = +\infty - \infty$ F.I

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} |x| \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{2 + \left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right)}$ ($\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to 0$)

$= +\infty$

B.M Taki Eddine
23.390.248

Qarray.tn-Aqra Blech. Qarray.tn Qarray.tn-Aqra Blech-Qa